

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICA  
ETAPA LOCALA  
CLASA A X-A MATE-INFO  
FEBRUARIE 2015

**Problema 1.** Arătați că mulțimile  $A$  și  $B$  sunt egale, unde

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 1\} \text{ și } B = \{2 \sin \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) \mid \alpha \in [0; \pi)\}.$$

**Problema 2.** Demonstrați că pentru orice  $a, b, c \in (0; 1)$  sau  $a, b, c \in (1; \infty)$  are loc inegalitatea

$$\log_a(bc) \cdot \log_b(ac) \cdot \log_c(ab) \geq 8.$$

**Problema 3.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că: a)  $f(1) = 1$ ;

b) Funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  considerată mai sus, iar

$$g(x) = x^2 - x f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ nu sunt injective.}$$

**Problema 4.** Fie  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \cdot b \neq 0$ , astfel încât  $(\sin x)^a = \cos x$  și

$$(\cos x)^b = \sin x.$$

a) Stabiliți semnul expresiei  $\ln(\operatorname{ctgx})$ ,  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ;

b) Comparați numerele  $a$  și  $b$ .

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore